

Datorövning:

Finn ett samband

1 Inledning

Den här övningen går ut på att belysa hur man kan utnyttja dimensionsanalys tillsammans med mätningar för att bestämma fysikaliska samband, samt på att ge en förberedelse för kommande laborationer där minsta kvadratmetoden används. Du kommer att få tillfälle att verifiera att din minsta kvadratanpassning fungerar som den ska.

Övningen innehåller total fem uppgifter att lösa. I dessa anges med **fetstil** vad som skall redovisas skriftligt.

Vi betraktar ett tänkt experiment där en balk placeras på två stödjande stativ som i Figur 1. Om man sedan applicerar en nedåtriktad kraft $\mathbf{F}$ mitt på balken kommer den att böjas lite grann så att den vid mitten rör sig nedåt en lite sträcka d . Vi tänker oss nu att vi på experimentell väg söker det funktions samband som ger d som en funktion av balkens höjd h , bredd b och avståndet L mellan stödjepunkterna.

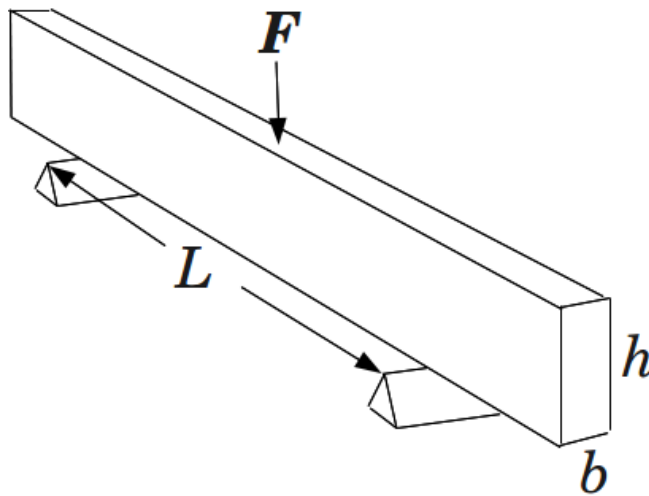


Figure 1: En balk som vilar mellan två stödjepunkter.

Till att börja med kan vi konstatera att böjningen sker genom att balkens undre del förlängs lite grann medan den övre trycks ihop. Om kraften inte är alltför stor kommer balken att återgå till utgångsläget när kraften tas bort, dvs den är elastisk. (För mycket stora krafter passerar man elasticitetsgränsen och får en permanent deformation av balken.) Nedböjningen d måste alltså bero på hur lätt det är att sammanpressa eller sträcka ut materialet som balken är gjord av.

2 Elasticitetsmodulen

Hur mycket ett material pressas ihop eller tänjs ut om man utsätter det för en dragande eller komprimerande kraft bestäms av en materialkonstant, *elasticitetsmodulen* E . Om vi tänker oss att vi drar i två ändar av en stång så att den förlängs, som i figur 2 måste förlängningen bli proportionell mot stångens längd (sätter vi t.ex. samman två stänger till en dubbelt så lång kommer ju samma dragkraft att påverka båda och totala förlängningen blir dubbelt så lång). Om dragkraften F_s är negativ (en kompressionskraft) kommer längden att minska (förlängningen ΔL är negativ) och om den är positiv (som i Figur 2) blir ΔL positiv.

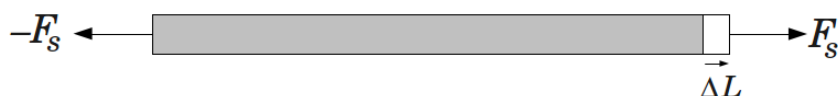


Figure 2: Elastisk deformation.

För små ΔL och F_s förväntar vi oss att ΔL är proportionellt mot F_s . (Om vi serieutvecklar funktionen $\Delta L(F_s)$ runt origo kommer den linjära termen att dominera för små F_s , såvida den inte är noll.) Detta är mycket riktigt fallet för små deformationer. Det betyder att om vi t.ex. fördelar samma kraft över två likadana stavar (alltså över en dubbelt så stor tvärsnittsarea), blir förlängningen hälften så stor. Med tre gånger så stor tvärsnittsarea blir förlängningen en tredjedel, osv. Förlängningen blir alltså proportionell mot stavens längd L och mot kraften F och omvänt proportionell mot tvärsnittsarean A , dvs

$$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{LF}{A}$$

där proportionalitetskonstanten konventionsmässigt skrivs som $\frac{1}{E}$. Materialkonstanten E är alltså elasticitetsmodulen, och sambandet ovan kallas *Hookes lag*.

3 Sambandets form

På grund av elastisk deformation böjs alltså balken i Figur 1 nedåt med en sträcka d . Nedböjningen måste bero på kraften, elasticitetskoefficienten och de aktuella dimensionerna, men det är allt! Vi kan nu ansätta ett samband

$$d = K F^\alpha L^\beta h^\gamma b^\delta E^\epsilon, \quad (1)$$

där de grekiska bokstäverna betecknar exponenter som vi förväntar oss skall vara hel- eller halvtaliga (eller i varje fall kvoten mellan två små heltal). K är en dimensionslös proportionalitetskonstant.

Om vi tänker oss att vi lägger en likadan balk bredvid vår första och fördelar kraften mellan de två får vi samma nedböjning om vi samtidigt dubblar den totala kraften så att kraften på *en* balk blir densamma som förut. Vi har då dubblat bredden b och kraften F . För att d skall vara konstant om F och b multipliceras med samma faktor måste $\delta = -\alpha$.

Eftersom vi betraktar små förändringar förväntar vi oss att d , som blir noll för $F = 0$, blir proportionellt mot F (återigen dominerar den linjära termen i en serieutveckling). Vi har alltså $\alpha = 1$, $\delta = -1$ och

$$d = K F b^{-1} L^{\beta} h^{\gamma} E^{\epsilon} \quad . \quad (2)$$

4 ”Experimentet”

Vi tänker oss nu att du ska bestämma β i ekvation 2, genom att göra en serie mätningar av d för olika värden på L . Istället för att göra faktiska mätningar skall du anta ett sant värde på β och lägga till slumpmässiga mätfel. När du utifrån dessa simulerade mätdata tagit fram en uppskattning av β med fel kan du kontrollera att feluppskattningen återspeglar avvikelsen från det sanna värdet (det faktiska felet) på ett rimligt sätt.

Antag därför att för en given balk och en viss kraft är det korrekta uttrycket för nedböjningen

$$d = 5\text{mm}(L/\text{m})^3 \quad . \quad (3)$$

Lägg märke till att detta uttryck är dimensionsmässigt korrekt eftersom L/m är dimensionslöst (mätetalet för längden i meter).

Uppgift 1: Beräkna det verkliga värdet på d för fem värden på L mellan 0,5 m och 1,5 m enligt ekvation 3. **Ange sammanhörande värden på L och d .**

Om vi nu tänker oss att någon gör faktiska mätningar där man ställer in dessa olika avstånd mellan stöden och mäter nedböjningen för vart och ett av dem kommer de resulterande värden att skilja sig från dem du använt, respektive beräknat, i uppgift 1, eftersom det förekommer mätfel. Vi kan anta att de typiska felen är 1 mm i L och 0,01 mm i d .

Uppgift 2: Octave-funktionen `normrnd(ave,std)` returnerar ett slumpmässigt värde som är normalfördelat runt medelvärdet `ave` med standardavvikelsen `std`. Använd denna funktion för att generera simulerade avvikelser från det önskade värdet på L från vart och ett av värdena från uppgift 1. Detta simulerar svårigheten att ställa in avståndet exakt, vilket leder till att det sanna värdet på L avviker från det önskade värdet. Beräkna för vart och ett av dessa sanna värden på L motsvarande sanna värde på d och använd återigen `normrnd` för att generera ett simulerat mätvärde för d som avviker från det ”verkliga” värdet.

Resultatet av uppgift 2 är en serie med sammanhörande värden på L och d . Den kan representera resultatet av mätningar som gjorts av en grupp studenter. Vi kan förutsätta att de lyckas uppskatta osäkerheterna korrekt, dvs som $\sigma_L = 1$ mm och $\sigma_d = 0,01$ mm.

Uppgift 3: Ange mätvärdena för L och d med fel i en tabell. Upprepa för ytterligare minst två studentgrupper.

5 Anpassningen

Om vi logaritmerar båda leden i ekvation 2 får vi

$$\ln d = \beta \ln L + C$$

där C är ett uttryck som inte beror på L och alltså är konstant om övriga storheter hålls konstanta. Om vi anpassar en rät linje till sammanhörande värden på d och L är alltså den anpassade lutningen en uppskattning av β .

För att göra en sådan anpassning måste vi först propagera felen i L och d till fel i $x = \ln L$ och $y = \ln d$. Därefter kan vi använda minsta kvadratmetoden för att bestämma det linjära sambandet. Men eftersom denna metod endast tar hänsyn till felen i y måste vi hantera felen i x som "ekvivalenta fel" i y (se appendix).

Uppgift 4: Genomför en minsta kvadratanpassning enligt ovan, med ekvivalenta fel, för var och en av mätserierna från uppgift 3. **Ange för varje mätserie resultatet för β , med fel. Kommentera om det verkar som om anpassningen och felkalkylen fungerar som de ska!**

6 Dimensionsanalys

När vi nu genom en (fiktiv) mätning bestämt att $\beta = 3$ kan vi gå tillbaka till ekvation 2 och bestämma de övriga exponenterna genom en dimensionsanalys, dvs genom kravet på att enheten skall vara densamma för höger- och vänsterled.

Uppgift 5: Genomför en sådan dimensionsanalys. **Redovisa räkningarna och ange resultatet för γ och ϵ .**

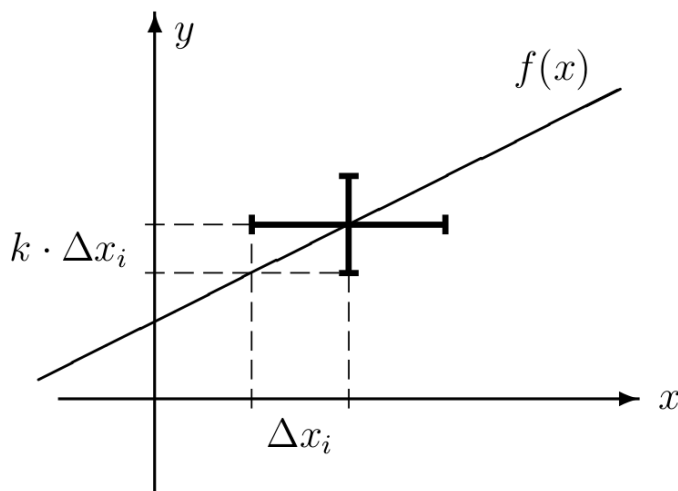
Efter att vi bestämt samtliga exponenter kan vi få värdet på K från en av mätningarna (eller genom att på något sätt kombinera dem). På så sätt har vi alltså genom allmänna resonemang och en enkel mätserie bestämt hur sambandet 1 ser ut.

Appendix: Ekvivalenta fel

Antag att en funktion $y = f(x)$ skall anpassas till ett antal mätpunkter (x_i, y_i) , där vi har mätfel Δx_i och Δy_i både i den oberoende variabeln x och i den beroende variabeln y (se figur nedan). Det är inte ovanligt att osäkerheten i x är större än osäkerheten i y . I en minsta kvadratanpassning ingår emellertid bara osäkerheten i y . För att ändå ta hänsyn till osäkerheten i x kan vi se på hur mycket värdet y_i ändras när x_i ändras. En enkel metod är att studera funktionens derivata (dvs grafens lutning) i punkten (x_i, y_i) .

Om lutning i punkten är k_i kommer värdet på funktionen $f(x)$ i närheten av punkten approximativt att variera som $f(x) = f(x_i) + k_i \Delta x$. Metoden är generell och gäller även för icke-linjära funktioner. I denna övning är dock vår anpassade funktion linjär och derivatan har då samma värde (k) i alla punkter.

För att bestämma lutningen, dvs värdet på k , gör vi först en preliminär anpassning där vi inte tar hänsyn till felen i x . De ekvivalenta felen i punkterna y_i som härrör från felen i x_i kan sedan beräknas som $k\Delta x_i$.



Vi kan sedan addera dessa ekvivalenta fel till osäkerheten i själva y -mätningen, dvs för vår slutliga anpassning använder vi y -fel givna av

$$\Delta y_{tot} = \sqrt{(\Delta y_i)^2 + (k\Delta x_i)^2}$$

Vi har på så sätt "lurat" minsta kvadratalgoritmen att ta hänsyn till felen i x . Men felen i x och felen i y är förstås olika saker, och skall vi åskådliggöra dem i en figur t.ex. så är det lämpligt att plotta punkterna med felstaplar i båda riktningarna, som i figuren ovan.